TEMA 4: ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

22/03/21

Cada vez que se representa una funḋ hay que estudiar los sgtes puntos:

1. Dominio
2. Corte con los ejes
3. Signo de la funḋ
4. Periodicidad
5. Simetría
6. Asíntotas
7. Extremos relativos
8. Monotonía
9. Puntos de inflexión
10. Curvatura

CORTE CON LOS EJES:

→ Cuando la gráfica corta eje x, significa que $y=0$
  ↳ Resolver $f(x)=0$

SE PUEDEN OBTENER NINGUNO, UNO O VARIOS PTOS DE CORTE.

→ Cuando la gráfica corta eje y significa que $x=0$
  ↳ Se sustituye $x=0$

SE PUEDE OBTENER SOLO 1 PUNTO DE CORTE

SIGNO DE LA FUNCIÓN

Hay que ver que valores del dominio de la funḋ son positivos.

Si los valores son positivos, indican que la gráfica estará x encima del eje de las x y si son negativos, indicará que está x debajo del eje de las x.

El signo se mira en la func. ¿Cómo se representa?
En la recta real y ponemos los puntos de discontinuidad y los puntos de corte con eje x.

Si corta la func en el eje x es xq pasa al otro lado o vuelve a cambiar. O tb puede ser que solo lo toque y sube.

Analizamos el signo de la func en c/u de los intervalos que van quedando.

PERIODICIDAD

Una func es periodica de periodo T cuando

$$\text{Si } f(x) = f(x+T)$$

↳ Donde T es el periodo

Esto ocurre siempre en las funciones trigonométricas.

SIMETRÍA

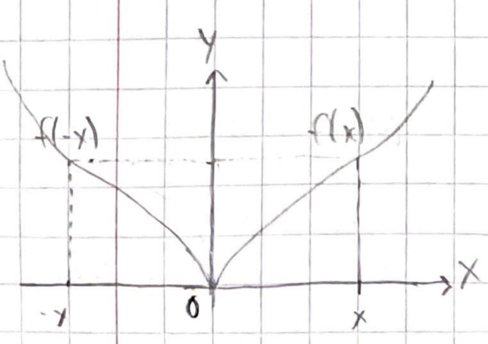
Puede haber simetría par o impar

SIMETRÍA PAR: $f(x) = f(-x)$

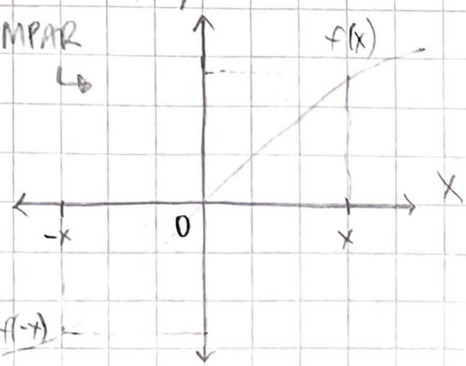
SIMETRÍA IMPAR: $f(-x) = -f(x)$

↳ otra forma de decir lo mismo: $-f(x) = f(x)$

PAR ↓



IMPAR ↳



ASÍNTOTAS

Verticales: Son rectas verticales, del estilo $x = a$, donde a es un número.

Se miran en los puntos de discontinuidad de la funø. Hay que mirar el límite cuando x tiende a a por la der y por izq. y si da + o - ∞, encontramos una asíntota vertical.

Busco el límite de a (el número) tal que el límite se haga infinito.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Horizontales: Son rectas paralelas al eje X y son de la forma $y = K$

Se obtienen haciendo el límite cuando x tiende a +∞ y el límite cuando x tiende a -∞

Puede haber a lo sumo 2.

Si esos límites dan un valor finito, K, un número, entonces la recta $y = K$ es una asíntota horizontal

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = K$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$$

Oblicuas: Son rectas con pendiente m y ordenada en el origen, $mx + n$ tal que m, la pendiente es este límite

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Una vez encontramos q̃ m es un número, que no sea 0, podemos calcular n de esta forma:

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

EXTREMOS

Supongamos q̃ $f'(a) = 0$, q̃ $f''(a) = 0$ ... y así sucesivamente $f^{(k-1)}(a) = 0$ hasta que se llega a una derivada que ya no se anula, que no es 0, $f^{k}(a) \neq 0$

Si K es par $\begin{cases} f^{k)}(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene MINIMO en a} \\ f^{k)}(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene MAXIMO en a} \end{cases}$

Si K es impar en $x = a$ NO HAY EXTREMO

MONOTONÍA

Crecimiento y decrecimiento

Si la 1ª derivada, $f'(a) > 0$, f es creciente en a

Si la 1ª derivada, $f'(a) < 0$, f es decreciente en a

Se mira en los puntos de discontinuidad y en los extremos relativos.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Se miran en la 2ª derivada.

2ª derivada igual a 0 y tercera o sucesivas impares distintas de 0.

Verifican que $f''(a) = 0$ y que $f'''(a) \neq 0$

Como regla general,

Si $f''(a) = 0$, $f'''(a) = 0$ ... $f^{(k)}(a) \neq 0$ entonces,

Si k impar: Punto de inflexion
Si k par: No podemos decir nada

CURVATURA

CÓNCAVA: Curva x encima de la tangente en un entorno del punto a

CONVEXA: Curva x debajo de la tangente en un entorno del punto a

EJEMPLOS

Revisamos tipos de funciones y qué es lo + importante de mirar en cada una de ellas.

POLINÓMICAS:

- Dominio → Toda la recta real $\mathbb{R}$
- Si el grado de la función es mayor que 1 NO EXISTEN ASÍNTOTAS
- Tienen 2 ramas infinitas en $+\infty$ y $-\infty$
- Para calcular los puntos hay que considerar:
  - Corte con los ejes
  - Maximos, minimos y estudio de monotonía
  - Puntos de inflexión y estudio de curvatura

RACIONALES:

- El dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los puntos que anulan al denominador
- Si hay raíces comunes se simplifica antes de calcular dominio y de dibujarla
- Nunca son periódicas
- Tienen asíntotas verticales en los puntos que anulan al denominador, excepto que esos puntos tb. anulen al numerador.
- Si posee asíntota horizontal no posee asíntota oblicua y viceversa

IRRACIONALES:

- Si son de índice impar están definidas en toda la recta real, todo $\mathbb{R}$
- Si son de índice par no están definidas para los números negativos, con lo q su dominio empieza a partir del 0
- Es frecuente q haya asíntota horizontal u oblicua en $+\infty$ y no en la $-\infty$ (o viceversa)

Ejemplos:

$$y = x + \sqrt{\frac{1}{x}}$$ → Se puede escribir así tb. $y = 1 + (1/x)^{1/2}$

DOMINIO = $\frac{1}{x} \geq 0$ $D = (0, \infty)$

CORTE EJE X

$$x + \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = -x$$ → No tiene solución real, no corta eje x

CORTE EJE Y → Donde hay x ponemos 0

$y = 0 + \sqrt{\frac{1}{0}} = \frac{1}{0} \to$ infinito $\to \sqrt{\infty} \to \infty$ → No corta, no es numero real finito.

Ya sé que la func no corta x ni a Y

SIGNO: Positivo, de $(0, +\infty)$

Prueba, ej. $x = 7$ $\quad y = 7 + \sqrt{\frac{1}{7}} = 7{,}37$ → POSITIVO

ASINTOTAS:

Vertical → $\lim_{x \to 0^+} \left(x + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) = 0 + \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty$

$x = 0$ es una asíntota vertical

Horizontal

$\lim_{x \to \infty} x + \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$ $\quad$ ∄ Asintota horizontal (existe cuando resultado es nº finito)

¿?

Oblicua

1º calculo la pendiente (NO tangente)

m es cdo $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ → IND

$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\frac{x}{x}} = 1$ → Como da 1 hay que calcular la n

$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

$\lim_{x \to \infty} x + \sqrt{\frac{1}{x}} - x = \sqrt{\frac{1}{\infty}} = 0 \to$ Es el valor de n

m vale 1
n vale 0

La recta es $y = mx + n$
$y = 1 \cdot x + 0$
$y = x$

EXTREMOS RELATIVOS : Hay que hacer la derivada

$y = x + \sqrt{\frac{1}{x}}$

$x \to 1$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{INVERSA}} \frac{-1}{x^2}$

raiz' $\to \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$

Cociente: $(f' \cdot g - f \cdot g')/g^2$

$1 + \frac{0}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}}$

¿?

* $\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}}}$ $\frac{-1 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{x}}}{x^2}$ ℓℓℓ

1^a derivada es
$\Downarrow$
$1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Para buscar pto de extremos relativos, 1ª derivada igual a 0

$$1-\left(\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)=0$$ ← mult. x $2\sqrt{x^3}$ a ambos lados

$$\left(1\cdot 2\sqrt{x^3}\right)-\left(\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)\cdot 2\sqrt{x^3}=0\cdot 2\sqrt{x^3}$$

$2\sqrt{x^3}-1=0$ ← sumo 1 ambos lados

$2\sqrt{x^3}-1+1=0+1$

$2\sqrt{x^3}=1$ ← Divido entre 2

$$\frac{2\sqrt{x^3}}{2}=\frac{1}{2}$$

$\sqrt{x^3}=1/2$ ← Elevar al cuadrado

$$\left(\sqrt{x^3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^3=\frac{1}{4}$$

$x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ → Posible PUNTO DE EXTREMO

CALCULAR 2ª derivada $y''=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ → ? $\frac{0}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}=0$

si es $=0$ sigo derivando
>0 tengo MAX
<0 tengo MIN

Segunda derivada, volver a derivar $1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}=$

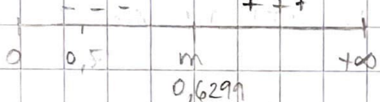
$$y''=\frac{3}{4x^{5/2}}$$ ← es mayor que 0 Tengo un mínimo

Calculo el punto con $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ← ¿Donde?
y lo sustituyo en la func

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}} = 1,8898$$

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}} , & 1,8898 \end{array} \right)$$

MONOTONÍA → Crecimiento y decrecimiento



Desde 0 porque dominio es de 0 en adelante. Sabemos q' la func. es continua.

Tiene un mínimo q' acabo de encontrar. Doy valores entre 0 y min y entre min y ∞.

¿? → Veo que entre 0 y min es negativo, por lo tanto decrece ↘ y entre m e ∞ es positivo, por lo tanto crece ↗

PUNTOS DE INFLEXIÓN

2ª derivada igualar a 0

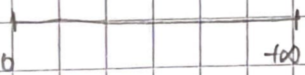
$$\frac{3}{4x^{5/2}} = \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$$

$\frac{3}{4\sqrt{x^5}} = 0$ → mult. $4\sqrt{x^5}$

$3 = 0$ → NO EXISTE

No hay puntos de inflexión
No cambiará de cóncava a convexa

CURVATURA



Tomo un valor del dominio, p. ej. 1 y sustituyo

$\frac{3}{4\sqrt{1^5}} = \frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow$ positivo $\rightarrow$ CONCAVA

Y ahora la puedo dibujar

En $x = 0 \rightarrow$ asíntota vertical
En $y = x \rightarrow$ asíntota oblicua

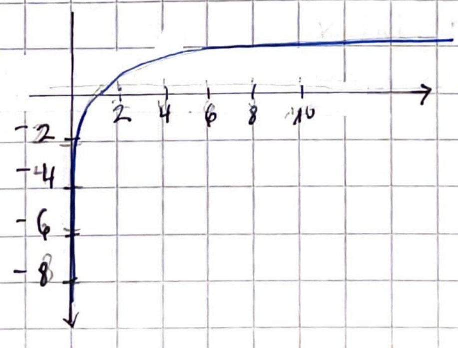
La func. decrece hasta un mínimo y luego crece y se va acercando asintóticam. (sin tocar a la asíntota oblicua)

EXPONENCIALES

- El dominio es todo $\mathbb{R}$
- Signo SIEMPRE positivo
- Puede que haya asíntota horizontal u oblicua en una rama del infinito y no en la otra.
  Es habitual que exista la asíntota horizontal en $+\infty$
  asíntota oblicua en $-\infty$
- Para resolver estos límites normalm. se usa la regla de L'Hopital.

LOGARÍTMICAS

$y = \ln(x)$



TRIGONOMÉTRICAS

$y = sen(x)$

TRASLACIONES

Sé dibujar $y = f(x)$. Si lo sé, no tengo que hacer todo el desarrollo si quisiera representar $y = f(x) + K$

Es la misma gráfica que $f(x)$, pero K unidades desplazada hacia arriba

Si sé dibujar x^2 puedo dibujar $x^2 + 7$

En el caso de $y = f(x+K)$ → K está dentro del paréntesis

Es la gráfica de $f(x)$ pero K unidades hacia la izquierda.

VALOR ABSOLUTO

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La gráfica del valor absoluto de $f(x)$ es la misma que $f(x)$ cuando la gráfica esté x encima del eje de las x.

Si está x debajo le damos la vuelta